

Chapitre 4 :

Echantillonnage des signaux continus

I. Introduction

L'importance des systèmes numériques de traitement de l'information ne cesse de croître (radio, télévision, téléphone, instrumentation...). Ce choix est souvent justifié par des avantages techniques tels que la grande stabilité des paramètres, une excellente reproductibilité des résultats et des fonctionnalités accrues. Les signaux porteurs d'informations sont pratiquement toujours de type analogiques (amplitude et temps continu).

Le traitement de signal par voie numérique nécessite une opération préliminaire de conversion analogique numérique. La conversion analogique numérique est la succession de trois effets sur le signal analogique de départ :

- l'**échantillonnage** pour rendre le signal discret
- la **quantification** pour associer à chaque échantillon une valeur
- le **codage** pour associer un code à chaque valeur.

II. Echantillonnage

II .1. Définition

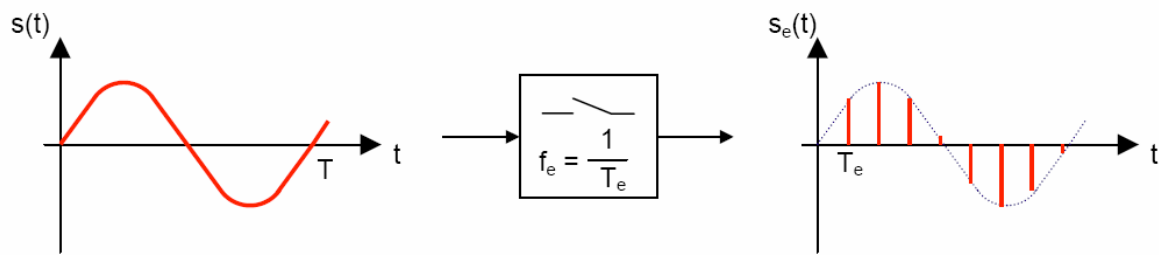
L'échantillonnage consiste à prélever à des instants précis, le plus souvent équidistants, les valeurs instantanées d'un signal. Le signal analogique $s(t)$, continu dans le temps, est alors représenté par un ensemble de valeur discrète :

$$s_e(t) = s(n.T_e)$$

Avec n : entier.

T_e : période d'échantillonnage.

Cette opération est réalisée par un échantillonneur souvent symbolisé par un interrupteur.

Figure (4.1) : L'échantillonnage d'un signal $s(t)$.

II .2. Echantillonnage idéal

L'échantillonnage idéal est modélisé par la multiplication du signal continu $s(t)$ et d'un peigne de Dirac de période T_e .

$$\begin{aligned}
 s_e(t) &= s(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \\
 &= s(t) \cdot \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \\
 &= s(nT_e) \cdot \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)
 \end{aligned}$$

🔧 Le spectre du signal échantillonné

Le spectre du signal échantillonné est donc le suivant :

$$\begin{aligned}
 S_e(f) &= \frac{1}{T_e} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} S(f) * \delta(f - nf_e) \\
 S_e(f) &= \frac{1}{T_e} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} S(f - nf_e)
 \end{aligned}$$

On obtient donc un spectre infini qui provient de la périodisation du spectre du signal d'origine autour des multiples de la fréquence d'échantillonnage f_e , avec $f_e = \frac{1}{T_e}$

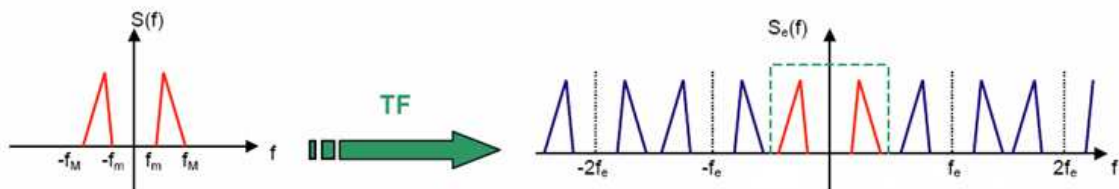


Figure (4.2) : Spectre d'un signal échantillonné.

Remarque :

- On voit sur le spectre du signal échantillonné qu'il est possible de restituer le signal original par un simple filtrage passe-bas.
- Si f_M , la fréquence maximale du spectre du signal à échantillonner, est supérieure à $f_e/2$, la restitution du signal original sera impossible car il va apparaître un **recouvrement spectral** lors de l'échantillonnage. On dit qu'on est en **sous-échantillonnage**.

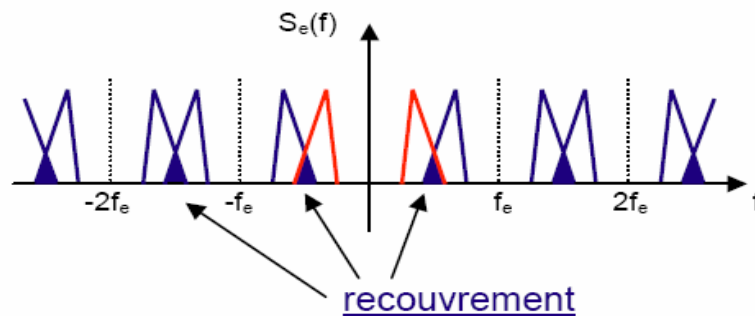


Figure (4.3) : Spectre d'un signal échantillonné si f_M est supérieure à $f_e/2$.

Le théorème de **SHANNON** montre que la reconstitution correcte d'un signal nécessite que la fréquence d'échantillonnage f_e soit au moins deux fois plus grande que la plus grande des fréquences f_M du spectre du signal :

$$f_e > 2f_M$$

Lorsqu'il y a recouvrement spectrale, nous avons vu qu'il était impossible de reconstruire correctement le signal. Pourtant dans la plupart des situations, le spectre du signal à échantillonner s'étale sur tout le domaine des fréquences (tout en diminuant du côté des hautes fréquences), mais il n'existe pas une fréquence f_{max} au-delà de laquelle l'énergie est nulle.

Il y a donc un problème pour choisir la fréquence d'échantillonnage. On se fixe donc en pratique une f_{max} à partir de laquelle on estime la représentation de notre signal satisfaisante pour les applications que l'on veut en faire. Puis on effectue un filtrage passe-bas (à f_{max}) avant l'échantillonnage afin de remédier aux repliements de spectre. On appelle ce filtre un **filtre anti repliement**.

III . Application

Soit le signal sinusoïdal $s(t) = \sin(2\pi F.t)$, de période $T = 1\text{ms}$.

$s_e(t)$ est le signal échantillonné avec un pas d'échantillonnage $T_e = 0.1\text{ms}$.

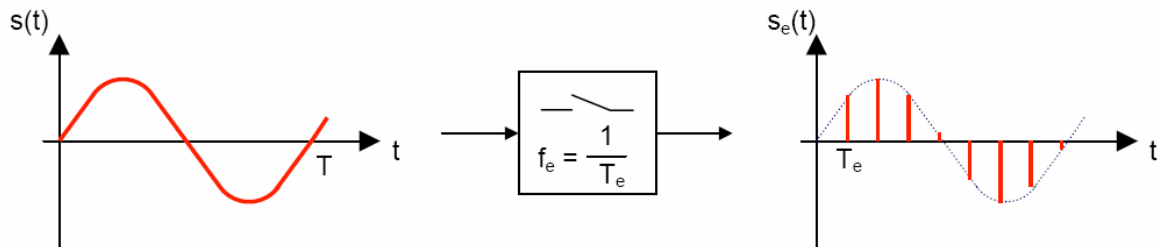
1- Représenter le signal $s(t)$ et $s_e(t)$ pour une période T .

2- Soit $S(f)$ la transformée de Fourier de $s(t)$ telle que $S(f) = \frac{1}{2j} [\delta(f - F) - \delta(f + F)]$.

- a- Représenter $S(f)$.
- b- Donner l'expression de la transformée de Fourier de $s_e(t)$: $S_e(f)$.
- c- Représenter $S_e(f)$ pour $-2 \leq n \leq 2$.

Réponse :

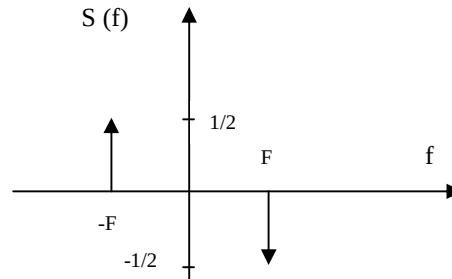
1-



Figure

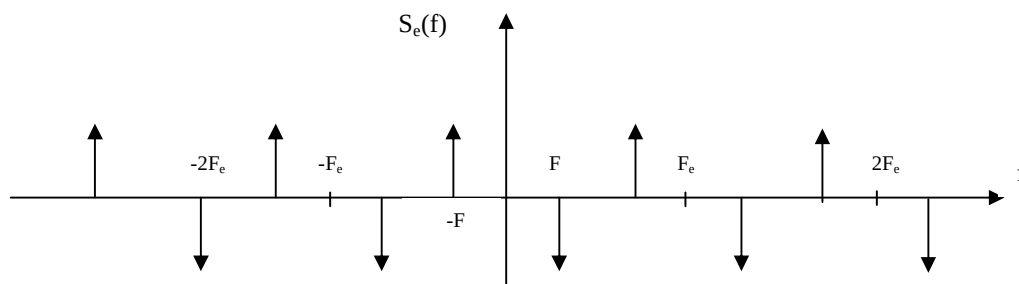
(4.4) : L'échantillonnage d'un signal $s(t)$.

2- a - On a $S(f) = \frac{1}{2j} [\delta(f - F) - \delta(f + F)]$ d'où $S(f) = \frac{1}{2} j [\delta(f + F) - \delta(f - F)]$

Figure (4.5) : Spectre de $s(t)$.b- L'expression de $S_e(f)$:

$$S_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_e \cdot S(f - nf_e)$$

c-

Figure (4.6) : Spectre de $s_e(t)$ pour $-2 \leq n \leq 2$.